Интегральное исчисление.

Часть 1. Неопределенный интеграл.

§1.Первообразная и неопределенный интеграл.

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием.**

Определение 1. ***Первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е.**

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Пример.

$$f(x) = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = x^5 \quad ;$$

$$F(x) = x^5 + 10 \quad ; \quad F(x) = x^5 - 20 \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, первообразных для данной функции $f(x)$ может быть бесчисленное множество.

Теорема. **Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.**

Доказательство: Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Докажем, что они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

По определению первообразной:

$$F_1'(x)=f(x) \text{ и } F_2'(x)=f(x)$$

Найдем производную разности первообразных:

$$\left(F_1(x)-F_2(x)\right)'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad \Rightarrow$$

$\left(F_1(x)-F_2(x)\right)'=0$ значит

$F_1(x)-F_2(x)=c \quad \Rightarrow \quad F_1(x)=F_2(x)+C$,

ч.т.д.

Вывод: прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения С, можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $\boxed{F(x)+C}$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Определение 2. **Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается**

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C},$$ где

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$;

C - постоянная интегрирования;

x – переменная интегрирования;

$\int$ - знак интеграла.

Определение 3. **Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется *интегрированием* данной функции.**

Пример. $\int 5x^4dx = x^5 + C$; $\int 10x^9dx = x^{10} + C$;

$\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

§2.Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Доказательство:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$$

Замечание. На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

$$dy = y'dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\boxed{\int d\left(F(x)\right) = F(x)+C}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\boxed{\int A\cdot f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx}, \quad A\neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\boxed{\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx}$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x.

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\boxed{\int f(u)du=F(u)+C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Пример. Так как $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$, то

$$\int \sin^2 x d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

$$\int\left(e^x\right)^2 d\left(e^x\right)=\frac{\left(e^x\right)^3}{3}+C$$

$$\int(\ln x)^2 d(\ln x)=\frac{(\ln x)^3}{3}+C \quad \text{и т.д.}$$

Замечание. Не путать с интегралами:

$$\int\sin^2 x dx \quad ; \quad \int\left(e^x\right)^2 dx \quad ; \quad \int(\ln x)^2\cdot dx$$

§3. Таблица основных интегралов.

1. $\int dx=x+C$

2. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad ,n\neq-1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int e^u du = e^u + C$

6. $\int \cos u du = \sin u + C$

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$

8. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$

9. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$

10. $\int \sec^2 u du = \mathrm{tg} u + C$

11. $\int \mathrm{cosec}^2 u du = -\mathrm{ctg} u + C$

12. $\int \sec u du = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

13. $\int \mathrm{cosec} u du = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$

14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{arcsec}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

Замечания: 1) Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \mathrm{ctgudu} = \ln|\mathrm{sinu}| + C$$

$$\left(\ln|\mathrm{sinu}| + C\right)' = \frac{(\mathrm{sinu})'}{\mathrm{sinu}} = \frac{\mathrm{cosu}}{\mathrm{sinu}} = \mathrm{ctgu}$$

2) Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Пример. Найти интегралы по таблице:

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 100} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-10}{x+10}\right| + C \qquad -(15)$

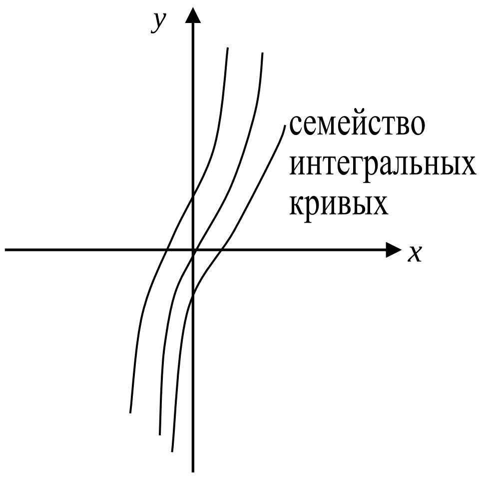
2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{9}\mathrm{arcsec}\frac{x}{9} + C \qquad -(17)$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C \qquad -(16)$

§4.Геометрический смысл неопределенного интеграла.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых вида $y = F(x) + C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Интегральные кривые получаются друг из друга, путем параллельного переноса вдоль оси ОУ.

Пример.



$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad F(x) = x^3$$

$\boxed{y = x^3 + C}$, если

$c = 0 \qquad y = x^3$

$c = 1 \qquad y = x^3 + 1$

$c = -1 \qquad y = x^3 - 1 \qquad$ и т.д.

Правило: чтобы из семейства интегральных кривых $y = F(x) + C$ выделить одну определенную кривую, нужно задать некоторые дополнительные условия для того, чтобы данная кривая, например, проходила через некоторую точку $M(x_0; y_0)$. Эти условия называются ***начальными***, т.е. при $x = x_0$; $y = y_0$. С помощью этих условий можно найти постоянную величину С:

$$y_0 = F(x_0) + C \quad \Rightarrow \quad C = y_0 - F(x_0)$$

Пример. Выделить из предыдущего семейства кривую, проходящую через точку $A(-1;3)$.

$y = x^3 + C$. Подставим в это уравнение координаты точки A.

$$3 = (-1)^3 + C$$

$$C = 3 + 1$$

$$C = 4$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{y = x^3 + 4}$$

§5. Методы непосредственного интегрирования.

1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

Пример.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C$

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Пример.

1) $\int \left(3x^3 + 5x^2 - x + 2\right)dx = \int 3x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int x dx + \int 2dx = = 3\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$

2) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = = \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2}dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

3. Непосредственное интегрирование.

3.1. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, если $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$

Пример.

1)

$$\int \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$, т.к. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

2) $$\int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x\,dx = \int e^{\operatorname{tg} x}\, d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$(dy = y'\,dx)$$

3) $$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

3.2. Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной **a** будет выполняться равенство:

$d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот

$dx = d(x+a)$ и поэтому

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(x)\,d(x+a)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

Пример.

1) $$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

3.3. Введение под дифференциал постоянного множителя.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

Пример.

1) $\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$

3.4. Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C}$$

Пример.

1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \ln\left|x^2+3x+7\right| + C$

§6. Метод подстановки.

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int\left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right| = 2t - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$